Etude de quelques problèmes d'équations différentielles fractionnaires

Présentée par :
Tarek NACER
Okba MAHDI

Dirigé par :
Dr : Belgacem REBIAI

25 Mai 2017

Plan

1. **Introduction**
2. Chapitre 1: **Préliminaires**
3. Chapitre 2: **Non existence de solutions globales de système fractionnaire de réaction-diffusion non linéaire**
4. Chapitre 3: **Conditions nécessaires d'éxistence locale et globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnaires**
5. **Conclusion**
6. **Bibliographie**

Introduction

Le but de cette étude est traité un problème de **Cauchy** de type **réaction-diffusion** avec terme de réaction non -linéaire suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

où:

- $N \geq 1$ et $p_i, q_i, i = 1, 2.$ des constants.

Introduction

Le but de cette étude est traité un problème de **Cauchy** de type **réaction-diffusion** avec terme de réaction non -linéaire suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

où:

- $N \geq 1$ et $p_i, q_i, i = 1,2.$ des constants.
- $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$: la dérivée d'ordre $0 < \alpha_i < 1, i = 1,2.$au sens de **Caputo.**

Introduction

Le but de cette étude est traité un problème de **Cauchy** de type **réaction-diffusion** avec terme de réaction non -linéaire suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} u = |u|^{p_1} |v|^{q_1} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} v = |u|^{p_2} |v|^{q_2} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{1}$$

où:

- $N \geq 1$ et $p_i, q_i, i = 1,2.$ des constants.
- $\mathbf{D}_{0|t}^{\alpha_i}$: la dérivée d'ordre $0 < \alpha_i < 1, i = 1,2.$au sens de **Caputo.**
- $(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}$: **Laplacian** d'ordre fractionnaire où $1 \leq \beta_i \leq 2, i = 1,2.$

Introduction (Historique)

Le **cas classique** $(\alpha_i = 1$ et $\beta_i = 2)$ est traité par nombreux auteurs et dans différents contextes par exemple :

- En 1991, **Escobedo** et **Herrero** a montré que pour $p_2 q_1 > 1, p_1 = q_2 = 0$ et $\frac{(\gamma+1)}{(p_2 q_1 - 1)} \geq \frac{N}{2}$ avec $\gamma = \max\{p_2, q_1\}$, alors la solution triviale est la solution unique de problème.

Introduction (Historique)

Le **cas classique** $(\alpha_i = 1$ et $\beta_i = 2)$ est traité par nombreux auteurs et dans différents contextes par exemple :

- En 1991, **Escobedo** et **Herrero** a montré que pour $p_2 q_1 > 1, p_1 = q_2 = 0$ et $\frac{(\gamma+1)}{(p_2 q_1 - 1)} \geq \frac{N}{2}$ avec $\gamma = \max\{p_2, q_1\}$, alors la solution triviale est la solution unique de problème.
- En 1995, **Escobedo** et **Levine** ont démontré si $p_1 \geq 1$ et $p_2 + q_2 \geq p_1 + q_1 > 0$, alors le système peut être considéré comme l'équation $u_t - \triangle u = u^{p_1+q_1}$.

Introduction (Historique)

Le **cas classique** $(\alpha_i = 1$ et $\beta_i = 2)$ est traité par nombreux auteurs et dans différents contextes par exemple :

- En 1991, **Escobedo** et **Herrero** a montré que pour $p_2 q_1 > 1, p_1 = q_2 = 0$ et $\frac{(\gamma+1)}{(p_2 q_1 - 1)} \geq \frac{N}{2}$ avec $\gamma = \max\{p_2, q_1\}$, alors la solution triviale est la solution unique de problème.
- En 1995, **Escobedo** et **Levine** ont démontré si $p_1 \geq 1$ et $p_2 + q_2 \geq p_1 + q_1 > 0$, alors le système peut être considéré comme l'équation $u_t - \triangle u = u^{p_1+q_1}$.
- En 2006, **Yamauchi** a considéré le problème avec le terme de réaction sous la forme $|x|^{\sigma_i} |u|^{p_i} |v|^{q_i}$, telque $p_i, q_i \geq 0, \sigma_i \geq \max\{-2, -N\}, i = 1, 2.$et on démontre le résultat de la non-existence sous quelques conditions dépendent du les exposants p_i, q_i, σ_i , $i = 1, 2.$et les données initiales u_0, v_0.

Introduction (Historique)

Dans le cas $0 < \alpha_i < 1$ et $1 \leq \beta_i \leq 2$,

- En 2005, **Kirane** et **al** ont démontré dans le cas $p_1 = q_2 = 0$, si

$$p_2 > 1, q_1 > 1, p_2 p_2' = p_2 + p_2', q_1 q_1' = q_1 + q_1'$$

et

$$N \leq \max \left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{q_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2' q_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}} \right\}$$

alors le problème n'admet aucune solution globale non-triviale.

Chapitre 1: Préliminaires

Outils de base
Intégrale fractionnaire
Derivées fractionnaires

Chapitre 2 : Non existence de solutions globales de système fractionnaire de réaction diffusion non linéaire

Définition 2.1 Solution faible

supposons que $Q_T := \mathbb{R}^N \times (0,T), 0 < T < +\infty$ on dit que $(u,v) \in \left(L^1_{loc}(Q_T)\right)^2$ est une solution locale faible de problème (1) dans Q_T ,si $|u|^{p_i}|v|^{q_i} \in L^1_{loc}(Q_T)$, $i = 1,2$, et satisfait

$$\int_{Q_T} |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 + \int_{Q_T} u_0 D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1 = \int_{Q_T} u D^{\alpha_1}_{t|T}\varphi_1 + \int_{Q_T} u(-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1,$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 + \int_{Q_T} u_0 D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2 = \int_{Q_T} v D^{\alpha_2}_{t|T}\varphi_2 + \int_{Q_T} v(-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_2,$$

pour toute fonction test $\varphi_i \in C^{1.2}_{x,t}(Q_T)$ vérifiant $\varphi_i(x,T) = 0, i = 1,2.$

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 2.2

soient $p_1 \geq 0, q_2 \geq 0$,
$p_2 > 1, q_1 > 1, p_2 p_2' = p_2 + p_2', q_1 q_1' = q_1 + q_1'$, et u_0, v_0 dans $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ vérifiant $u_0, v_0 \not\equiv 0$.si

$$N \leq N^* = \max\left\{ \frac{\frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_1 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 p_2 q_1'} + \frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2'}}, \frac{\frac{\alpha_1}{p_1} + \alpha_2 - \left(1 - \frac{1}{p_2 q_1}\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p_2' q_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2 q_1'}} \right\}$$

Alors le problème (1) n'admet aucune solution globale faible.

Preuve:(par contradiction)

Supposons que (u, v) est une solution globale faible non-négative de (1).
Soit $\Phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$, pour tout $r \geq 0$,telle que:

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \text{ si } r \geq 2 \end{cases} \quad \text{et } \Psi(s) = \begin{cases} (1-s)^{\gamma} & \text{si } 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{si } s \geq 1 \end{cases}$$

tel que $\gamma \geq \max\{\alpha_1 q_1', \alpha_2 p_2'\}$.
En choisissant

$$\varphi_i(x,t) = \phi^l(x)\psi(t), i = 1, 2.$$

avec

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\theta}}\right), \psi(t) = \Psi\left(\frac{t}{T}\right) \text{ et } l \geq \max\{q_1', p_2'\},$$

On applique l'inégalité de **Hölder** sur la membre droite de formule variationelle dans Ω, tel que

$$\Omega = (0, T) \times \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2T^\theta \right\}.$$

on obtient

$$\left(\int_\Omega |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq A_1 A_2^{\frac{1}{p_2}}, \tag{2}$$

et

$$\left(\int_\Omega |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq A_2 A_1^{\frac{1}{q_1}} \tag{3}$$

où

$$A_1 = \left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}} + \left(\int_\Omega \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}$$

$$A_2 = \left(\int_\Omega \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} |\varphi|^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}} + \left(\int_\Omega \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}$$

Maintenent,d'aprés l'inégalité de **Ju**

$$(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi^l \leq l\phi^{l-1}(-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}}\phi$$

et le changment de variable suivant: $t = T\sigma, x = T^{\alpha_i/\beta_i}\xi$ dans A_i , $i = 1, 2.$ on obtient :

$$\left(\int_\Omega |u|^{p_1}|v|^{q_1}\varphi_1 dtdx\right)^{1-\frac{1}{q_1p_2}} \leq CT^{-\left(\frac{\gamma_1}{P_2'}+\frac{\gamma_2}{p_2q_1}\right)} \quad (4)$$

et

$$\left(\int_\Omega |u|^{p_2}|v|^{q_2}\varphi_2 dtdx\right)^{1-\frac{1}{q_1p_2}} \leq CT^{-\left(\frac{\gamma_1}{P_2'q_1}+\frac{\gamma_2}{q_1}\right)} \quad (5)$$

tel que

$$\gamma_1 = \alpha_1 p_2' - \frac{\alpha_1}{\beta_1}N - 1, \text{ et } \gamma_2 = \alpha_2 q_1' - \frac{\alpha_2}{\beta_2}N - 1$$

Si nous choisissons $N < N^*$ et comme T tend vers l'infini dans (4) et (5) alors :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx = 0$$

On utiliser le théorème de **convergence dominée** et la **continuité** de u et v on obtient $u \equiv 0$ or $v \equiv 0$,donc on a **une contradiction**

Dans le cas $N = N^*$, en prenant la fonction test ϕ pour tout $0 < R < T$ sous la forme:

$$\phi(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{(T/R)^{\theta}}\right)$$

et posons:

$$\Omega_R = (0,T) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2\left(\frac{T}{R}\right)^{\theta}\right\},$$

$$\triangle_R = (0,T) \times \left\{x \in \mathbb{R}^N : \left(\frac{T}{R}\right)^{\theta} \leq |x| \leq 2\left(\frac{T}{R}\right)^{\theta}\right\},$$

On applique l'inégalité de **Hölder** sur le membre droite de la formule variationnelle dans Ω_R, on obtient:

$$\int_{\Omega_R} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq \left(\int_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} B_1 + \left(\int_{\triangle_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \right)^{\frac{1}{p_2}} C_1$$

$$B_1 = \left(\int_{\Omega_R} |D_T^{\alpha_1} \varphi_1|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}$$

$$C_1 = \left(\int_{\triangle_R} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right|^{p_2'} |v|^{-\frac{q_2 p_2'}{p_2}} |\varphi_2|^{-\frac{p_2'}{p_2}} dtdx \right)^{\frac{1}{p_2'}}$$

Et

$$\int_{\Omega_R} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq \left(\int_{\Omega_R} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} B_2 + \left(\int_{\triangle_R} |v|^{q_1} |u|^{p_1} \varphi_1 dtdx \right)^{\frac{1}{q_1}} C_2$$

$$B_2 = \left(\int_{\Omega_R} \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}$$

$$C_2 = \left(\int_{\triangle_R} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_1'} |u|^{-\frac{p_1 q_1'}{q_1}} \varphi_1^{-\frac{q_1'}{q_1}} dtdx \right)^{\frac{1}{q_1'}}$$

Si nous introduisons le changment de variables suivant:

$$t = T\tau, x = \left(\frac{T}{R}\right)^{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \xi,$$

dans B_i et C_i, on obtient

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx\right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq CR^{-\left(\frac{\gamma_1'}{P_2'} + \frac{\gamma_2'}{p_2 q_1'}\right)} \tag{6}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx\right)^{1-\frac{1}{q_1 p_2}} \leq CR^{-\left(\frac{\gamma_1'}{P_2' q_1} + \frac{\gamma_2'}{q_1'}\right)} \tag{7}$$

tel que

$$\gamma_i' = \frac{\alpha_i}{\beta_i} N, i = 1, 2.$$

Finalement , si nous prenons la limite quand $R \longrightarrow \infty$ à (6) et (7) nous obtenons que

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx = 0$$

et nous déduisons que $u \equiv 0$ et $v \equiv 0$,ce qui contreduit notre hypothèse.

Notre principal résultat est le suivant :

Théorème 2.3

soient u_0, v_0 dans $L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ telles que $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0, v_0 \not\equiv 0$ si

$$p_1 > 1, q_2 > 1, p_2 \geq 0, q_1 \geq 0, 0 < \alpha_i < 1 et 1 \leq \beta_i \leq 2,$$

et

$$1 \leq N \leq \max\left\{\beta_1 p_1' - \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \beta_2 q_2' - \frac{\beta_2}{\alpha_2}\right\}$$

Alors le problème (1) n'admet aucune solution globale faible.

Preuve: est fait par **contradiction**.
D'aprés l'inégalite de **hölder** on obtient :

$$\int_{\Omega} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 dtdx \leq CT^{-\gamma_1} \tag{8}$$

$$\int_{\Omega} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 dtdx \leq CT^{-\gamma_2} \tag{9}$$

tel que

$$\gamma_1 = \alpha_1 p_1' - \frac{\alpha_1}{\beta_1} N - 1$$

$$\gamma_2 = \alpha_2 q_2' - \frac{\alpha_2}{\beta_2} N - 1$$

De même façon on obtient une contradiction

Chapitre 3: Conditions nécessaires d'existence locale et globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnaires

Chapitre 3: Conditions nécessaires d'existence locale et globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnaires

- Conditions nécessaires pour l'existence locale

Chapitre 3: Conditions nécessaires d'existence locale et globale pour certains systèmes de réaction-diffusion fractionnaires

- Conditions nécessaires pour l'existence locale
- Conditions nécessaires pour l'existence globale

Théorème 2.3

Soit $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0, p_1 > 1, q_2 > 1, p_2 \geq 0$ et $q_1 \geq 0$. si (u, v) une solution faible locale $(T < +\infty)$ du problème (1). Alors,

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf u_0(x) \leq C_1 T^{-\frac{\alpha_1}{P_1 - 1}}, \tag{10}$$

et

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf v_0(x) \leq C_2 T^{-\frac{\alpha_2}{q_2 - 1}}, \tag{11}$$

où C_1 et C_2 sont des conctantes.

Corollary

sous les conditions de théorème (2.3), si (u, v) *une solution faible globale du problème (1). Alors,*

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) = 0, \quad ou \quad \lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) = 0.$$

Corollary

sous les conditions de théorème (2.3), si

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) = \lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x) = +\infty,$$

alors la problème (1) n'admet aucune solution faible locale non négative non triviale.

Supposons que (u, v) est une solution locale positive faible de (1) pour tout $t \in [0, T]$.
En prenant les fonctions test de la forme

$$\varphi_i(x,t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \begin{cases} \left(1-\frac{t}{T}\right)^l & 0 < t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \tag{12}$$

où $\Phi \in W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ est positif, à support dans $\{R < |x| < 2R\}$ et vérifie

$$\left((-\Delta)^{\frac{\beta_i}{2}} \Phi\right)_+ \leq k_i \Phi \text{ pour une certaine constante } k_i > 0. \tag{13}$$

Grâce à la formulation variationnelle (**??**), nous avons

$$\int_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \leq \int_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 + \int_{Q_T} u \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1,$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \leq \int_{Q_T} u D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 + \int_{Q_T} u \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1,$$

et

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq \int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 + \int_{Q_T} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2,$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq \int_{Q_T} v D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 + \int_{Q_T} v \left(-\Delta\right)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2.$$

En utilisant l'inégalité de **Hölder**, nous obtenons

$$\int_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} .A$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_1} |v|^{q_1} \varphi_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} .A$$

où

$$\begin{aligned} A = & \left(\int_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \right|^{p_1'} |v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1'}} \\ & + \left(\int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_1}{2}} \varphi_1 \right|^{p_1'} |v|^{-\frac{q_1 p_1'}{p_1}} |\varphi_1|^{-\frac{p_1'}{p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1'}} \end{aligned}$$

Et d'une façon analogue, on obtient

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2'}} .B$$

$$\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \leq \left(\int_{Q_T} |u|^{p_2} |v|^{q_2} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{q_2'}} .B$$

où

$$B = \left(\int_{Q_T} \left| D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}} + \left(\int_{Q_T} \left| (-\Delta)^{\frac{\beta_2}{2}} \varphi_2 \right|^{q_2'} |u|^{-\frac{p_2 q_2'}{q_2}} \varphi_2^{-\frac{q_2'}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_2'}}$$

Par conséquence

$$\int_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 \leq A^{p_1'} \tag{14}$$

et

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_2} \varphi_2 \leq B^{q_2'} \tag{15}$$

Maintenant, on considére le changement de variables $t = T\tau$ et $x = Ry$,on obtient

$$A \leq CR^{\frac{N}{p_1'}} \left(T^{\frac{1}{p_1'}+\alpha_1} + T^{\frac{1}{p_1'}} R^{-\beta_1} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy \right)^{\frac{1}{p_1'}}$$

$$B \leq CR^{\frac{N}{q_2'}} \left(T^{\frac{1}{q_2'}+\alpha_2} + T^{\frac{1}{q_2'}} R^{-\beta_2} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y)\, dy \right)^{\frac{1}{q_2'}} \quad (16)$$

Et utilisant (**??**), on obtient

$$\int_{Q_T} u_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 = \frac{\Lambda_1 T^{1-\alpha_1} R^N}{1+l-\alpha_1} \int_{\mathbb{R}^N} u_0 (Ry) \Phi (y) dy$$

$$\int_{Q_T} v_0 D_{t|T}^{\alpha_1} \varphi_1 = \frac{\Lambda_2 T^{1-\alpha_1} R^N}{1+l-\alpha_2} \int_{\mathbb{R}^N} v_0 (Ry) \Phi (y) dy \qquad (17)$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(Ry\right)\Phi\left(y\right)dy \leq C_1\left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}}+T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}}R^{-\beta_1}\right)^{p_1'}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi\left(y\right)dy \qquad (18)$$

où C_1 est un constant positif indépendant de R et T:
Donc

$$\inf_{|y|>1} u_0\left(Ry\right) \leq C_1\left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}}+T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}}R^{-\beta_1}\right)^{p_1'} \qquad (19)$$

Enfin, faisant tendre $R \longrightarrow \infty$ dans (19), et l'estimation (10) est provée.

Maintenant,on utilisant (15),(16) et (17), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0\left(Ry\right)\Phi\left(y\right)dy \leq C_2\left(T^{-\frac{\alpha_2}{q_2}}+T^{\frac{\alpha_1}{q_2'}}R^{-\beta_2}\right)^{q_2'}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi\left(y\right)dy \qquad (20)$$

alors

$$\inf_{|y|>1} v_0\left(Ry\right) \leq C_2\left(T^{-\frac{\alpha_2}{q_2}}+T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}}R^{-\beta_1}\right)^{q_2'} \qquad (21)$$

Donc quand $R \longrightarrow \infty$ dans (21), et L'estimation (11) est prouvée.

Théorème

Supposons que le problème (1) admet une solution faible non-négative globale et non-triviale. Alors il existe deux constantes C_3 et C_4 tellesque

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_3, \tag{22}$$

et

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf v_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}} \leq C_4, \tag{23}$$

.

. D'aprés l'expression (18) on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(Ry)\,\Phi(y)\,dy \leq C_1\left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}}+T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}}R^{-\beta_1}\right)^{p_1'}\int_{\mathbb{R}^N}\Phi(y)\,dy \qquad (24)$$

que l'on multiplie par $|Ry|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}\,|Ry|^{-\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$ à l'intérieur de l'intégrale et dans les deux membres. En tenant compte du fait que supp $\Phi \subset \{1<|y|<2\}$, l'expression (24) devient

$$\liminf_{|x|>R} u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1\left(T^{-\frac{\alpha_1}{p_1}}+T^{\frac{\alpha_1}{p_1'}}R^{-\beta_1}\right)^{p_1'}(2R)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$$

En prenant $T = R$, il résulte

$$\lim_{|x|>R} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 (2)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \left(1 + R^{\alpha_1-\beta_1}\right)^{p_1'}$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini et comme $\alpha_1 < \beta_1$, on obtient

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$$

En prenant $T = R$, il résulte

$$\lim_{|x|>R} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 (2)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \left(1 + R^{\alpha_1-\beta_1}\right)^{p_1'}$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini et comme $\alpha_1 < \beta_1$, on obtient

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$$

- on pose $C_3 = C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$,et l'inégalite (22) est trouvée.

En prenant $T = R$, il résulte

$$\lim_{|x|>R} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 (2)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \left(1 + R^{\alpha_1-\beta_1}\right)^{p_1'}$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini et comme $\alpha_1 < \beta_1$, on obtient

$$\lim_{|x|\to\infty} \inf u_0(x) |x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$$

- on pose $C_3 = C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$,et l'inégalite (22) est trouvée.

En prenant $T = R$, il résulte

$$\liminf_{|x|>R} u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1\,(2)^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \left(1 + R^{\alpha_1-\beta_1}\right)^{p_1'}$$

En passant à la limite quand R tend vers l'infini et comme $\alpha_1 < \beta_1$, on obtient

$$\liminf_{|x|\to\infty} u_0(x)\,|x|^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}} \leq C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$$

- on pose $C_3 = C_1 2^{\frac{\alpha_1}{P_1-1}}$,et l'inégalite (22) est trouvée.
- **D**e même, on obtient l'inégalité (23) avec $C_4 = C_2 2^{\frac{\alpha_2}{q_2-1}}$.

Conclusion

Ce mémoire offre natturellement de nombreuses perspectives:

1. **La première** est l'étude systèmes de réaction-diffusion fractionnaires dont l'ordre compris entre 1 et 2.

Conclusion

Ce mémoire offre natturellement de nombreuses perspectives:

1. **La première** est l'étude systèmes de réaction-diffusion fractionnaires dont l'ordre compris entre 1 et 2.

Conclusion

Ce mémoire offre natturellement de nombreuses perspectives:

1. **La première** est l'étude systèmes de réaction-diffusion fractionnaires dont l'ordre compris entre 1 et 2.
2. **La deuxième** perspective envisageable serait l'étude des systèmes de m équations, $m > 2$.

Bibliographie

- M. Escobedo and M. A. Herrero, Boundedness and blow-up for a semilinear reaction-diffusion equation, J. Diff. Equations 89 (1991), 176-202.
- M. Escobedo and H. A. Levine, Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations, Arch. Rational. Mech. Anal. 129 (1995), 47-100.
- M. Fila, H. A. Levine and Y. Uda, A Fujita-type global existence-global nonexistence theorem for a system of reaction diffusion equations withdiffering diffusivities, Math. Methods Appl. Sci. 17 (1994), 807-835.

Bibliographie

- H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 13 (1966), 109-124.
- M. Kirane, Y. Laskri and N. E. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl. 312 (2005), 488-501
- M. Kirane and M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction-diffusion systems, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002), 217-243.

Bibliographie

- B. Rebiai and K. Haouam, Nonexistence of global solutions to a nonlinear fractional reaction-diffusion system, IAENG Int. J. Appl. Math. 45(4) (2015), 259-262.
- B. Rebiai, S. Benzeghari and K. Haouam, Necessary conditions of existence for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives.Novi Sad J. Math.(2016)
- B. Rebiai, S. Rouar and K. Haouam, Critical exponents for a nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives.Global Journal of Pure and Appl. Math.6(2016),5343–5351..
- Y. Yamauchi, Blow-up results for a reaction-diffusion system, Methods Appl. Anal. 13 (2006), 337-350.

Merci

pour votre

attention